УДК 539.3

Б.Ф.ЗАЙЦЕВ, докт.техн.наук, ст.науч.сотр.; ИПМаш НАН Украины, Харьков;
А.В.АСАЕНОК, канд.техн.наук, ИПМаш НАН Украины, Харьков;
Н.Е.ВИКМАН, асп., ИПМаш НАН Украины, Харьков

ПОСТРОЕНИЕ МАТРИЦ МАСС ДЛЯ УЧЕТА ЦЕНТРОБЕЖНЫХ СИЛ ПРИ КОЛЕБАНИЯХ ТРЕХМЕРНОГО ВРАЩАЮЩЕГОСЯ ТЕЛА

Побудовано матриці мас полілінійного ізопараметричного скінченного елемента, які лінійно враховують залежність відцентрових сил від вузлових переміщень та забезпечують радіальність дії відцентрових сил при зміщеннях.

The mass matrices of polylinear isoparametric finite element, which take into account linearly dependence of centrifugal forces on node displacements and provide radialness of action of centrifugal forces at displacements, are obtained.

Введение и постановка задачи. Трехмерная постановка задачи колебаний вращающейся конструкции (ротора) необходима в ряде случаев, например, для корректного отражения механизма «дыхания» трещины, берега которой контактируют. В ряде работ, например [1, 2], использованы элементы континуального подхода для моделирования переменной жесткости вала с трещиной, основанные на применении механики трещин. В этих работах основной является стержневая модель, дополненная соотношениями континуальной механики для жесткостных характеристик на участке с трещиной, учет масс выполнен согласно стержневой модели.

Колебания вращающихся тел по стержневой модели обычно рассматриваются как в неподвижной, так и во вращающейся системе координат [3], причем заметных преимуществ для исследований ни та, ни другая система не имеет, исключая отдельные случаи, например вал двоякой жесткости [4]. При введении вращающейся системы координат необходимо учитывать инерционные силы переносного движения, то есть центробежные силы. Масса тела в стержневой модели сосредотачивается на оси, и при отклонениях ее из начального состояния легко обеспечивается линейная зависимость центробежных сил от перемещений и их радиальная направленность.

В трехмерном случае вращающегося тела для устранения перемещений тела как жесткого целого от вращения рассмотрение колебаний может быть выполнено только во вращающейся системе координат [5]. В рамках геометрически линейного подхода предполагается учет центробежных сил, зависящих от перемещений произвольных точек тела и отнесенных к недеформированному состоянию. Это нарушает радиальный характер действия центробежных сил и приводит к так называемой «отрицательной» жесткости на кручение, что проявляется в появлении сил, направленных в сторону закручивания (против восстанавливающих сил) и определяемых скоростью вращения. Вообще говоря, при рассмотрении перемещений в деформированном состоянии (геометрически нелинейный подход) корректность учета центробежных сил была бы обеспечена, но это неоправданно усложненный подход. Ставится задача, оставаясь в рамках линейного подхода, то есть относя деформации к начальному состоянию, учесть изменение центробежных сил, связанных с перемещениями, и обеспечить их радиальную направленность. Решение этой задачи осуществляется в рамках МКЭ и сводится к построению дополнительных матриц масс конечного элемента.

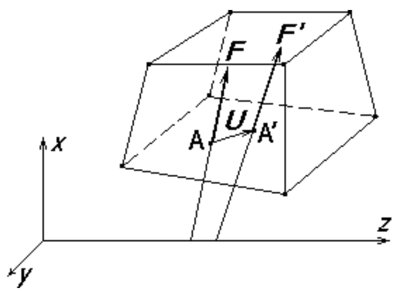
Получение матриц масс. Вывод матриц выполнен для изопараметрического восьмиузлового полилинейного конечного элемента (КЭ), который рассматривается в подвижной системе декартовых прямоугольных координат x,y,z, связанной с вращающимся вокруг оси z телом с угловой скоростью ω. В КЭ введены локальные координаты ξ,η,ζ, связанные на интервале [–0.5 , 0.5] с глобальными декартовыми координатами зависимостями

$$x = \sum_i x_i N_i(\xi,\eta,\varsigma)\,; \quad y = \sum_i y_i N_i(\xi,\eta,\varsigma)\,; \quad z = \sum_i z_i N_i(\xi,\eta,\varsigma)\,, \tag{1}$$

где x_i, y_i, z_i $(i = 1,\ldots,8)$ – координаты узлов КЭ; $N_i(\xi,\eta,\zeta) = (0{,}5 + \xi_i\xi)\,(0{,}5 + \eta_i\eta)\,(0{,}5 + \zeta_i\zeta)$ – функции формы; $\xi_i,\eta_i,\ \zeta_i$ – локальные координаты i-го узла КЭ.

Рассмотрим действие центробежных сил на материальную точку А (x,y,z), принадлежащую КЭ (см. рисунок) и имеющую массу dm (координатам x,y,z точки А соответствуют координаты ξ,η,ζ). В недеформированном состоянии центробежная сила $\boldsymbol{F}$ равна

$$F_x = x\omega^2 dm\,; \quad F_y = y\omega^2 dm\,; \quad F_z = 0\,. \tag{2}$$



Изменение центробежной силы при смещении точки КЭ

Силу $\boldsymbol{F}$ можно заменить на статически эквивалентную ей систему сил $\boldsymbol{F}_i$, приложенных к узлам КЭ, и которые выражаются формулами

$$F_{xi} = F_x N_i(\xi,\eta,\zeta); \quad F_{yi} = F_y N_i(\xi,\eta,\zeta); \quad F_{zi} = 0; \quad (i = 1,\ldots,8), \tag{3}$$

где F_{xi}, F_{yi}, F_{zi} – проекции узловых сил на оси координат.

При деформировании материальная точка переместится в положение A′ с глобальными координатами x', y', z' и соответствующими им локальными координатами ξ',η',ζ'

$$\begin{gathered} x' = x + u; \quad y' = y+v; \quad z' = z+w; \\ \xi' = \xi + \Delta\xi; \quad \eta' = \eta + \Delta\eta; \quad \zeta' = \zeta + \Delta\zeta, \end{gathered} \tag{4}$$

где u, v, w – компоненты вектора перемещений $\boldsymbol{U}$ в глобальной системе координат, а изменения локальных координат $\Delta\xi$, $\Delta\eta$, $\Delta\zeta$ можно рассматривать как компоненты вектора смещений в локальных координатах $\boldsymbol{\upsilon}$.

Центробежная сила $\boldsymbol{F}'$ в точке A′ определена компонентами

$$F'_x = (x+u)\omega^2 dm; \quad F'_y = (y+v)\omega^2 dm; \quad F'_z = 0$$

и аналогично (3) может быть заменена эквивалентной системой узловых сил

$$F'_{xi} = F'_x N_i(\xi',\eta',\zeta'); \quad F'_{yi} = F'_y N_i(\xi',\eta',\zeta'); \quad F'_{zi} = 0. \tag{5}$$

Так как деформация рассматривается по отношению к недеформированному объему, то в выражениях (5) все функции должны определяться координатами ξ, η, ζ (или x, y, z), а зависимость центробежных сил от перемещений должна быть линейной (линейная постановка задачи).

Между векторами $\boldsymbol{U}\{u, v, w\}$ и $\boldsymbol{\upsilon}\{\Delta\xi, \Delta\eta, \Delta\zeta\}$ существует взаимно однозначное соответствие, которое следует установить. Исходя из (1) и (4) выразим компоненты вектора перемещений через координаты точки А в деформированном и недеформированном состоянии

$$\begin{aligned} u &= x' - x = \sum_i x_i \left[N_i(\xi',\eta',\zeta') - N_i(\xi,\eta,\zeta)\right]; \\ v &= y' - y = \sum_i y_i \left[N_i(\xi',\eta',\zeta') - N_i(\xi,\eta,\zeta)\right]; \\ w &= z' - z = \sum_i z_i \left[N_i(\xi',\eta',\zeta') - N_i(\xi,\eta,\zeta)\right]. \end{aligned} \tag{6}$$

Выполним разложение функций формы $N_i(\xi',\eta',\zeta')$ в ряд Тейлора в окрестности точки А(ξ, η, ζ) с точностью до второго порядка малости

$$N_i(\xi',\eta',\zeta') = N_i(\xi,\eta,\zeta) + \frac{\partial N_i}{\partial \xi}\Delta\xi + \frac{\partial N_i}{\partial \eta}\Delta\eta + \frac{\partial N_i}{\partial \zeta}\Delta\zeta + \mathrm{o}\,(\Delta\xi^2,\ldots). \tag{7}$$

В связи с малостью перемещений нелинейные члены в (7) не учитываются.

После подстановки (7) в выражения (6) и преобразований получим связь между перемещениями u, v, w и приращениями локальных координат

$$u = \sum_i x_i \frac{\partial N_i}{\partial \xi}\Delta\xi + \sum_i x_i \frac{\partial N_i}{\partial \eta}\Delta\eta + \sum_i x_i \frac{\partial N_i}{\partial \zeta}\Delta\zeta;$$

$$v = \sum_i y_i \frac{\partial N_i}{\partial \xi}\Delta\xi + \sum_i y_i \frac{\partial N_i}{\partial \eta}\Delta\eta + \sum_i y_i \frac{\partial N_i}{\partial \zeta}\Delta\zeta\,; \tag{8}$$

$$w = \sum_i z_i \frac{\partial N_i}{\partial \xi}\Delta\xi + \sum_i z_i \frac{\partial N_i}{\partial \eta}\Delta\eta + \sum_i z_i \frac{\partial N_i}{\partial \zeta}\Delta\zeta\,.$$

Систему уравнений (8) можно представить в матричном виде

$$\boldsymbol{U} = [A]\boldsymbol{\upsilon}, \tag{9}$$

где матрица [A] составлена из коэффициентов $\alpha_{ij} = \alpha_{ij}(\xi, \eta, \zeta)$, определяемых выражениями (8).

Из решения системы уравнений (9) получим обратные соотношения – выражения перемещений в локальной системе координат через смещения в глобальных координатах

$$\upsilon = [B]\, U, \tag{10}$$

где $[B] = [A]^{-1}$, а элементы матрицы $[B]$ – $\beta_{ij} = \beta_{ij}(\xi, \eta, \zeta)$.

Преобразуем выражения для узловых центробежных сил (5) с учетом разложения (7), тогда получим

$$F'_{xi} = (x+u)\omega^2 dm\left(N_i + \frac{\partial N_i}{\partial \xi}\Delta\xi + \frac{\partial N_i}{\partial \eta}\Delta\eta + \frac{\partial N_i}{\partial \zeta}\Delta\zeta \right);$$

$$F'_{yi} = (y+v)\omega^2 dm\left(N_i + \frac{\partial N_i}{\partial \xi}\Delta\xi + \frac{\partial N_i}{\partial \eta}\Delta\eta + \frac{\partial N_i}{\partial \zeta}\Delta\zeta \right);$$

$$F'_{zi} = 0.$$

После подстановки в полученные выражения соотношений (10) получим зависимости для узловых сил в деформированном состоянии

$$F'_{xi} = F_{xi} + \omega^2 dm\left[(N_i + x\gamma_{i1})u + (x\gamma_{i2})v + (x\gamma_{i3})w\right];$$

$$F'_{yi} = F_{yi} + \omega^2 dm\left[(y\gamma_{i1})u + (N_i + y\gamma_{i2})v + (y\gamma_{i3})w\right]; \tag{11}$$

$$F'_{zi} = 0,$$

где $\gamma_{ij} = \beta_{1j}\frac{\partial N_i}{\partial \xi} + \beta_{2j}\frac{\partial N_i}{\partial \eta} + \beta_{3j}\frac{\partial N_i}{\partial \zeta}$ ($i = 1,\ldots,8$; $j = 1, 2, 3$).

Дальнейшие преобразования (11) связаны с переходом к узловым смещениям u_i, v_i, w_i согласно зависимостям изопараметрического КЭ

$$u = \sum_i u_i N_i(\xi,\eta,\zeta)\,; \quad v = \sum_i v_i N_i(\xi,\eta,\zeta)\,; \quad w = \sum_i w_i N_i(\xi,\eta,\zeta)\,. \tag{12}$$

После подстановки (12) в (11) и интегрирования по объему элемента v_e, то есть суммирования узловых центробежных сил от множества материальных точек КЭ, получим следующие матричные соотношения для КЭ

$$\widetilde{\mathbf{F}}' = \omega^2 \widetilde{\mathbf{P}}_{\mathbf{e}} + \omega^2 [\widetilde{M}_1]\widetilde{\boldsymbol{\upsilon}} + \omega^2 [\widetilde{M}'_1]\widetilde{\boldsymbol{\upsilon}}\,.$$

Здесь $\widetilde{\boldsymbol{\upsilon}}$ – вектор узловых перемещений КЭ; постоянный вектор $\widetilde{\mathbf{P}}_{\mathbf{e}}$ имеет компоненты

$$\widetilde{P}_{ix} = \int\limits_{v_e} \rho x N_i dv_e \, ; \quad \widetilde{P}_{iy} = \int\limits_{v_e} \rho y N_i dv_e \, ; \quad \widetilde{P}_{iz} = 0 \, .$$

Блочные матрицы $[\widetilde{M}_1], [\widetilde{M}'_1]$ имеют размерность 24×24, а их структуры определяются видом блоков

$$[\widetilde{M}_1]_{ki} = \begin{bmatrix} m_{ki} & 0 & 0 \\ 0 & m_{ki} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad [\widetilde{M}'_1]_{ki} = \begin{bmatrix} m'_{11} & m'_{12} & m'_{13} \\ m'_{21} & m'_{22} & m'_{23} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad (14)$$

где $[\widetilde{M}_1]_{ki}$, $[\widetilde{M}'_1]_{ki}$ – блоки (подматрицы) размером 3×3, соответствующие трем строкам k-го узла и трем столбцам i-го узла матриц $[\widetilde{M}_1]$, $[\widetilde{M}'_1]$ а их элементы равны

$$m_{ki} = \int\limits_{v_e} \rho N_k N_i dv_e \, ; \quad m'_{1j} = \int\limits_{v_e} \rho x N_i \gamma_{kj} dv_e \, ; \quad m'_{2j} = \int\limits_{v_e} \rho y N_i \gamma_{kj} dv_e \, , \quad (j = 1,2,3). \qquad (15)$$

Согласно структуре блоков матрица $[\widetilde{M}_1]$ симметричная, а матрица $[\widetilde{M}'_1]$ является несимметричной.

Таким образом, матрицы масс $[\widetilde{M}_1]$, $[\widetilde{M}'_1]$ определяют изменение центробежных узловых сил в зависимости от смещений точек КЭ при колебаниях, причем сохраняется отсутствие крутящего момента относительно оси вращения от системы узловых сил КЭ.

Заключение. Для трехмерного полилинейного изопараметрического конечного элемента построены матрицы масс, которые линейным образом учитывают изменение узловых центробежных сил от узловых перемещений точек во вращающейся системе координат. Построенные матрицы отражают радиальную направленность центробежных сил переместившихся точек в объеме конечного элемента вследствие чего крутящий момент от узловых центробежных сил равен нулю. Полученные матрицы масс имеют симметричную и несимметричную структуру.

Список литературы: **1**. *Bachschmid N.* Cracks in rotating shafts: experimental behaviour, modelling and identification // SURVEILLAN 5 CETIM, Senlis (2004). **2**. *Kicinski J.*, *Banaszek S.* Non-linear interactions in large power machine with cracked rotor // ISCORMA-3, Cleveland, Ohio, 19–23 September 2005. **3.** *Шульженко Н.Г.* Определение признака появления трещины при изгибных колебаниях весомого ротора // Пробл. машиностроения. – 1987. – Вып. 27. – С. 24-29. **4**. *Бидерман В.Л.* Прикладная теория механических колебаний. – М.: Высшая школа, 1972. – 416 с. **5**. *Зайцев Б.Ф.* Трехмерный МКЭ в расчетах колебаний вращающегося тела / Б.Ф. Зайцев, А.В. Асаенок, Н.Е. Ерецкая // Вестник НТУ «ХПИ». – 2008. – № 36. – С. 88-92.

Поступила в редколлегию 30.06.2009.